Μαθημα 3° 5/3/2018

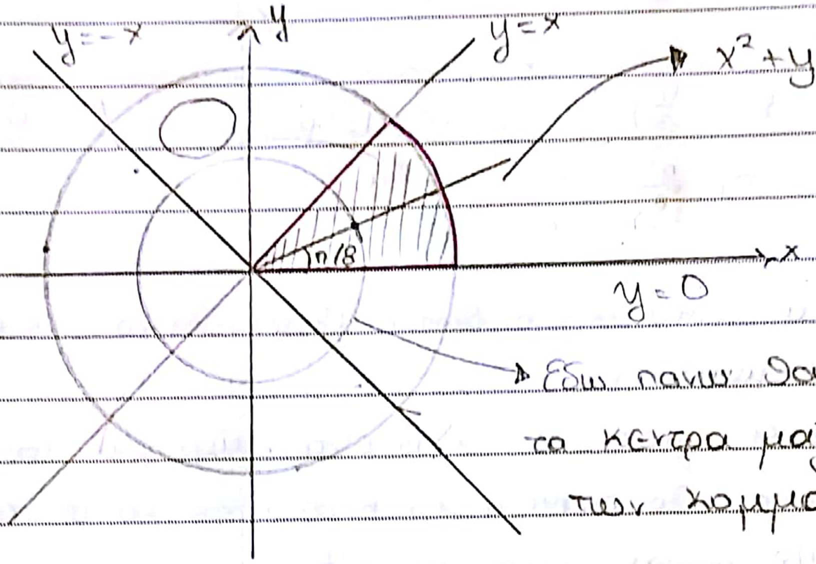
Κλασσική Μηχανική

Παραδειγμα 1

Να βρεθει το κεντροειδές ενος κομματιου πιτσα → = Σημειο ισορροπιας $(\bar{x}, \bar{y})$

Δηλ θελω το σημειο ισορροπιας

απαντηση



Η πυκνοτητα μου ειναι σταθερη, εχω παντου ιδια ποσοτητα υλικων.

Οι καμπυλες που περικλυουν το κομματι μας ειναι οι εξης

$y=x$, $y=0$ και $x^2+y^2=a^2$

χρησιμοποιω πολικες συντεταγμενες

$$M=\iint \rho\, dA=\iint \rho\, \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{dA} = \int_0^{\pi/4}\int_0^{a} \rho\, r\,dr\,d\theta =$$

$$=\rho\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{a} r\,dr = \rho\,\frac{\pi}{4}\,\frac{a^2}{2} = \pi\rho\,\frac{a^2}{8}$$

$$M_y=\iint x\rho\, dA=\rho\int_0^{\pi/4}\int_0^{a} r\cos\theta\; r\,dr\,d\theta=\rho\int_0^{\pi/4}\cos\theta\, d\theta\int_0^{a} r^2 dr =$$

$$=\rho\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a^3}{3}$$

$$M_x = \iint y\,\rho\, dA = \rho \int_0^{\pi/4}\int_0^{a} r\sin\theta\, r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^{\pi/4} \sin\theta\, d\theta \int_0^{a} r^2\, dr =$$

$$= \rho\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{a^3}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\rho \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a^3}{3}}{\pi\rho\frac{a^2}{8}} = \frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\rho\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{a^3}{3}}{\pi\rho\frac{a^2}{8}} = \frac{(8-4\sqrt{2})a}{3\pi}$$

- για να δω αν ειμαι σωστη θελω $(\bar{x},\bar{y})$ ζευγος να ανηκει μεσα στο κομματι μου.

Προφανως ισχυει γιατι τα $\bar{x}, \bar{y}$ ειναι μικροτερα του a

- Λογω συμμετριας θα περιμενα το κεντρο του να βρισκεται στη διχοτομο της γωνιας $y=x$ και $y=0$

Παρατηρηση

1. Να δειξετε οτι το κεντροειδες δηλ το σημειο $(\bar{x},\bar{y})$ βρισκεται στη διχοτομο που σχηματιζουν η $y=0$ και $y=x$ Δηλαδη στη γωνια $\pi/8$

;

Θυμαμαι

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$
- $2\sin x \cos x = \sin(2x)$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

Αυτο μου λεει οτι οι συναρτησεις $\cos x$, $\sin x$ δεν υπαρχουν αλλα εχω το εκθετικο μονο

Προσθετω $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

Αφαιρω $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

2. Να βρεθουν τα κεντρα μαζας των υπολοιπων κομματιων
3. Ποιος ο γεωμετρικος τοπος αυτων των σημειων;

Απαντηση

Αρκει να βρω ενα κεντροειδες και τα βρηκα ολα αφου υπαρχει συμμετρια οποτε το $(\bar{x}, \bar{y})$ θα πρεπει να ειναι κυκλος

Αν προσθεσω κατι πανω σ' ενα κομματι της πιτσας τι θα συμβει; Τοτε η πυκνοτητα δε θα ειναι σταθερη. Εκει θα ειναι λιγο πιο βαρια η πιτσα.

Ροπες αδρανειας

Οι δυο ροπες που ορισαμε μεχρι τωρα μας δινουν πληροφορια για τα σημεια ισορροπιας. Ζηταμε τη συμπεριφορα του σωματος οταν δεν ισορροπει.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{(8-4\sqrt{2})a}{3\pi}}{\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}} = \frac{(8-4\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} =$$

$$\boxed{\tan\frac{\pi}{4} = 1}, \quad \tan\frac{\pi}{8}$$

$$\begin{cases} \cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

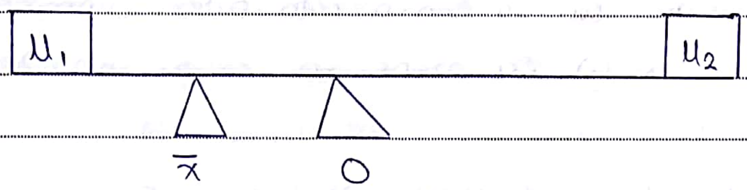
Παράδειγμα 2

Η τραμπάλα

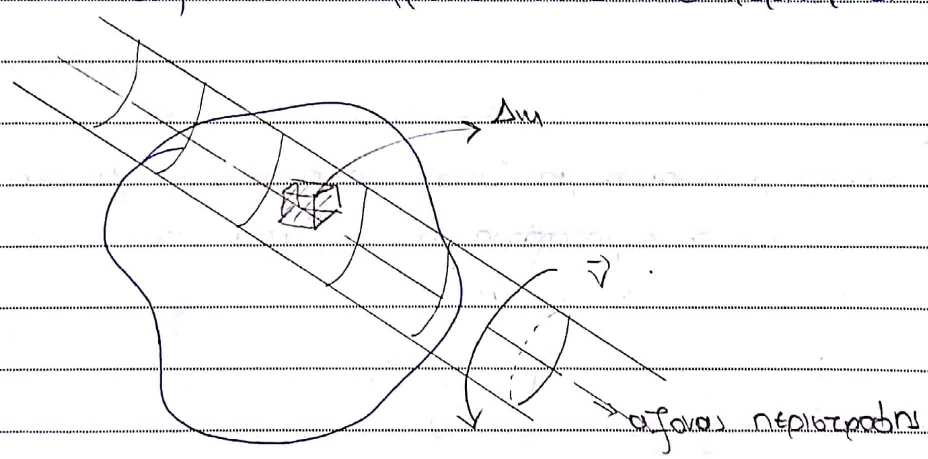
Αν το υπομόχλιο δε βρίσκεται στη θέση ισορροπίας δηλ. στο κέντρο μάζας, η τραμπάλα περιστρέφεται. Δημιουργούνται λοιπά δύο ερωτήματα

(1) Πόση ενέργεια χρειάζεται για να περιστρέψουμε το σώμα;

(2) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ή και να αποθηκεύσουμε αυτή την ενέργεια;



Έστω ένα σώμα δεν ισορροπεί και εκτελεί περιστροφή



Ο στοιχειώδες όγκος περιστρέφεται με μια ταχύτητα $\vec{v}$

Η στοιχειώδης μάζα Δm απέχει από τον άξονα περιστροφής μια ακτίνα r_i και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

Άρα η ταχύτητα κέντρου μάζας:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$ με S : τόξο που διανύθηκε

πόσο γρήγορα σαρώνει τη γωνία

$\boxed{\text{Τόξο}: S = r_i \theta}$

$$v = \frac{d}{dt}(r_i\theta) = r_i \frac{d\theta}{dt} = \omega r_i$$

Η κινητική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας είναι η εξής

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m\, v^2 = \frac{1}{2}\Delta m (\omega r_i)^2$$

συνολική ενέργεια

Αθροίζουμε όλες τις στοιχειώδεις ενέργειες ΔΕ με

$$E = \int \Delta E = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int r^2\, dm}_{I}$$

και προκύπτει μια ποσότητα η οποία ονομάζεται ροπή αδράνειας και συμβολίζουμε με

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 I = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- Η ροπή αδράνειας ονομάζεται συχνά και δεύτερη ροπή

Φυσική σημασία

1. Για να περιστρέψουμε έναν μηχανικό άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω χρειαζόμαστε ενέργεια $E = \frac{1}{2} I \omega^2$. Αυτό είναι και το ποσό της ενέργειας που χρειάζεται για να σταματήσουμε έναν περιστρεφόμενο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω

2. Η ροπή αδράνειας είναι το "περιστροφικό" ανάλογο της μάζας γιατί $E = \frac{1}{2} m (v^2)$ → πόσο γρήγορα σαρώνω ένα μήκος

Η βασική διαφορά είναι ότι εμπεριέχει όχι μόνο τη πληροφορία της μάζας αλλά και το τρόπο κατανομής της.

Ορίζουμε ως ροπές αδράνειες ή δεύτερες ροπές τα εξής.

- ως προς τον άξονα x: $I_x = \iint_R y^2 \underbrace{\rho\, dA}_{dm}$ $\quad \rho = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = dA \cdot \rho$

- ως προς τον άξονα y: $I_y = \iint_R x^2 \rho\, dA$

- ως προς την αρχή των αξόνων: (πολική ροπή)

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho\, dA = I_x + I_y$$

Στη γενική περίπτωση η ροπή ως προς μια ευθεία L ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{I = \iint_R r^2 \rho \, dA}$$

όπου r η απόσταση του (x,y) σημείου από την L

Η σχέση $I_o = I_x + I_y$ καλείται θεώρημα καθέτων αξόνων

Βάση των ροπών αδράνειας ορίζουμε τις ακτίνες αδράνειας

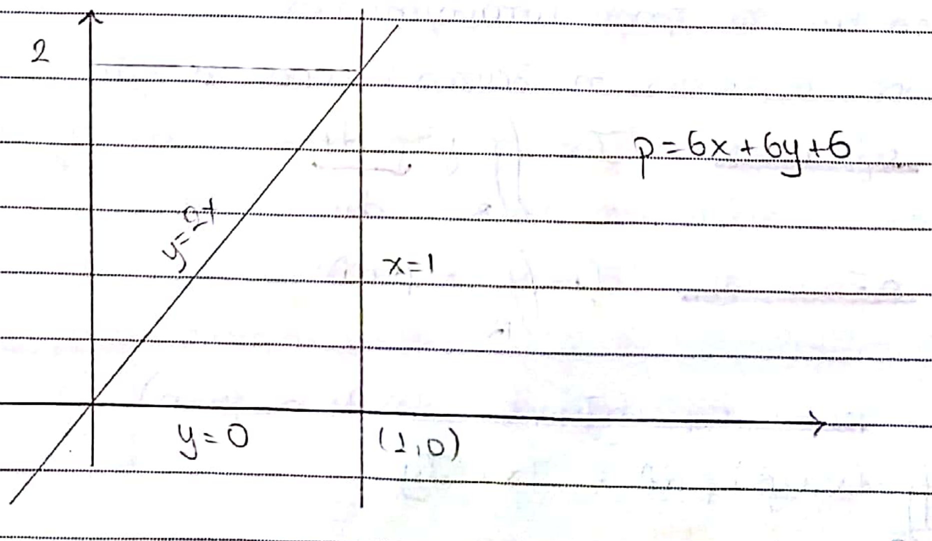
$$\left[\begin{cases} I_x = m R_x^2 \\ I_y = m R_y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = \sqrt{I_x / m} \\ R_y = \sqrt{I_y / m} \end{cases}\right] \; !$$

Οι ποσότητες αυτές μας λένε σε ποια απόσταση από τους αντίστοιχους άξονες ($R_x \to x$, $R_y \to y$) μπορούμε να συγκεντρώσουμε τη συνολική μάζα του σώματος, ώστε να έχουμε την ίδια ροπή αδράνειας, δηλαδή αντιστοιχώ το σώμα σε σημείο.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το κέντρο μάζας του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ πυκνότητα μάζας $\rho = 6x + 6y + 6$ καθώς και οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας

Απάντηση



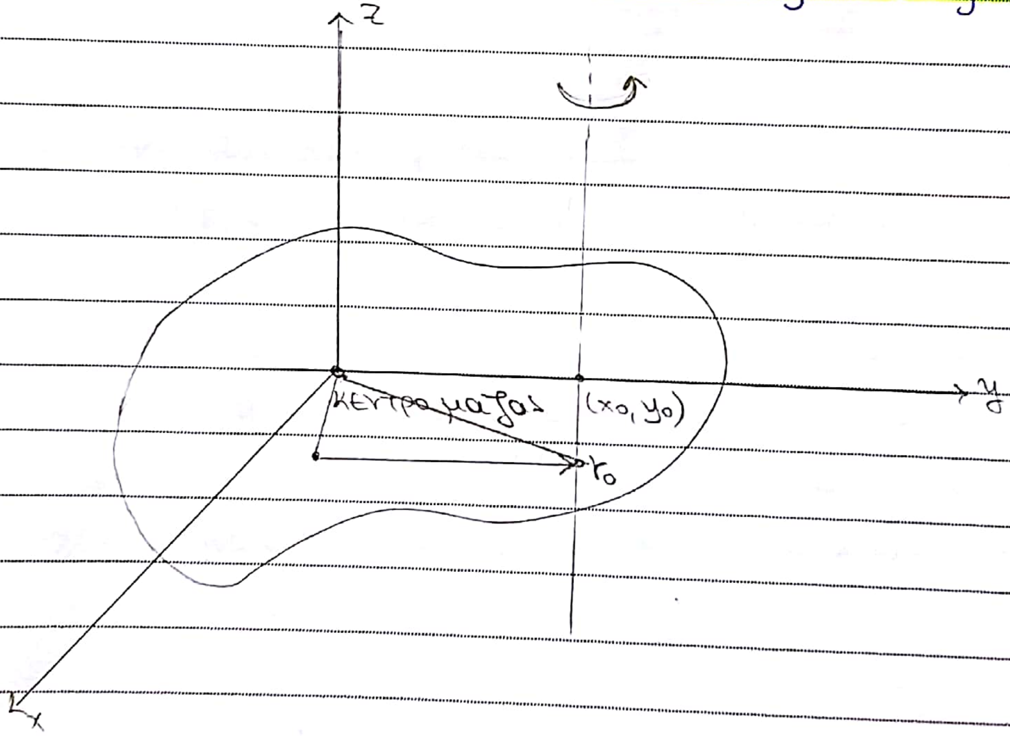
$$m = \iint \rho \, dA = \int_0^2 \int_{y/2}^1 (6x+6y+6)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2x} (6x+6y+6)\, dy\, dx$$

$M_x = 11$, $M_y = 10$, $I_x = 12$, $I_y = \frac{39}{5}$, $I_0 = \frac{99}{5}$ (πράξεις μόνη...)

Θεώρημα παράλληλων αξόνων (Θέμα εξετάσεων)! SOS

Το κεντροειδές μιας πλάκας βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και η πλάκα έχει συνολική μάζα m. Η ροπή αδράνειας γύρω από άξονα κάθετο στη πλάκα στο σημείο (x_0, y_0) είναι $I_0 = I_x + I_y + (x_0^2 + y_0^2)\cdot m$



Γνωρίζω ότι κέντρο μάζας $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,0) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right) \Rightarrow \begin{cases} M_x = 0 \\ M_y = 0 \end{cases}$

Επίσης $J_0 = \iint_R r^2 \rho \, dA$ με $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$

DNOTE

$$I_O = \iint_R \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right] \rho \, dA = \iint_R (x^2 + x_0^2 - 2x_0 x + y^2 + y_0^2 - 2y_0 y) \rho \, dA =$$

$$= \iint_R x^2 \rho \, dA + \iint_R y^2 \rho \, dA + x_0^2 \iint_R \rho \, dA + y_0^2 \iint_R \rho \, dA -$$

$$2x_0 \iint_R \underbrace{x \rho \, dA}_{M_x = 0} - 2y_0 \iint_R \underbrace{y \rho \, dA}_{M_y = 0} =$$

$$= I_x + I_y + x_0^2 \cdot m + y_0^2 m^2 = I_x + I_y + m(x_0^2 + y_0^2)$$

Scanned by CamScanner